

Mathematisches Gruselkabinett

Summengleichungen:

Für eine rekursive Reihe sei eine äquivalente explizite Funktion abzuleiten. Es gilt als Voraussetzung folgender Satz: *Ergibt sich als Glied einer Reihe die Summe der vorangehenden n Glieder, so ist der Grad des expliziten Terms gleich n.* Bei der Summe der letzten drei Glieder ergibt sich also ein (gemischt) kubischer Ausdruck, bei der Fibonacci-Reihe ein gemischt quadratischer, denn diese Reihe ist definiert als $a(n) = a(n-2) + a(n-1)$, $a(1) = 1, a(2) = 1$.

Im Folgenden leiten wir die explizierte Funktion der Fibonacci-Reihe her.

$$a(3) = 2; a(4) = 3; a(5) = 5; a(6) = 8$$

$$ax^2 + bx + c = a(x)$$

Einsetzen für drei verschiedene Reihenglieder.

$$9a + 3b + c = 2$$

$$16a + 4b + c = 3$$

$$25a + 5b + c = 5$$

Wir lösen das Gleichungssystem und erhalten

$$a = 1/2$$

$$b = -5/2$$

$$c = 5$$

Die explizite Fibonacci-Reihe

lautet also:

$$a(n) = n^2/2 - 5n/2 + 5 .$$

Zum Test: $a(6) = 18 - 15 + 5 = 8$.

Für $a(1)$ und $a(2)$ liefert die Gleichung ein falsches Ergebnis, für alle anderen Reihenglieder ein richtiges-warum?

Betrachtungen des Kreises:

Bitte folgen Sie den anschliessenden Gedankengängen.

Ein Stab werde zufällig in drei Teile zerbrochen.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, aus den Bruchstücken ein Dreieck formen zu können?

Dieses Problem wurde in folgendem Buch gestellt:

"CHIP-Rüdeger Baumann, Programmieren mit PASCAL".

Die Dreieckseiten müssen 3 Ungleichungen genügen,

den so genannten *Dreiecksungleichungen*.

Sie lauten:

$$a + b > c, a + c > b, b + c > a.$$

Dies ist in exakt einem Viertel aller Fälle im Durchschnitt gegeben.

Analog lässt sich die Fügewahrscheinlichkeit für das Viereck angeben. Es muss gelten:

$$a+b+c>d, a+b+d>c, a+c+d >b, b+c+d>a.$$

Analoges gilt für alle n-Ecke.

Es gelte folgende *induktive Vermutung*:

Bei einem n-Eck betrage die Fügewahrscheinlichkeit $p=1- n/2^{n-1}$ da die überlange Seite immer unwahrscheinlicher wird.

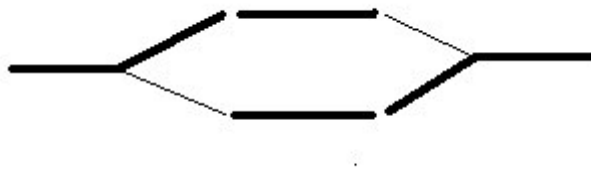
Für $n = \infty$, das ist der Kreis, beträgt die Fügewahrscheinlichkeit gleich Eins. Was bedeutet dieses Ergebnis?

Es besagt nichts anderes, als dass die Kreiszahl PI transzendent ist, da sie sich von keinem rechtwinkligen Radialdreieck herleiten lässt.

Wechselschalter:

Die Aufgabestellung ist es, zwei oder mehrere Schaltstellen so zu verdrahten, dass an jeder Stelle der Schaltzustand verändert werden kann.

Bei zwei Stellen ist die Lösung simpel und alltäglich im Gebrauch. Trotzdem die Skizze:

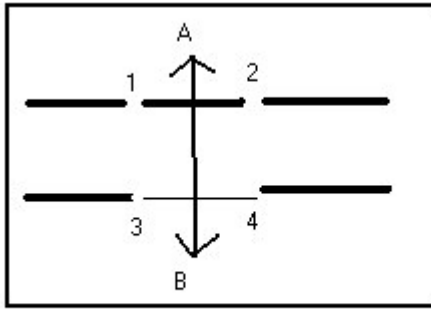


Wie sieht die Lösung für drei Schaltstellen aus?

Ich möchte zwei Lösungen angeben, eine technische und eine mathematische.

1.: Die Lampe ist am Ausgang eines Flip-Flops geschaltet, am Eingang ist für jede Schaltstelle ein Taster am Doppeldraht angeschlossen. Beliebige viele Schaltstellen sind möglich. Durch Betätigen eines beliebigen Tasters wird die Lampe ein- bzw. ausgeschaltet.

2.: Es gibt auch eine Möglichkeit ohne Elektronik, nur mit Schaltern. Dazu benötigt man aber relativ viele Verbindungsdrähte und Mehrfachschalter folgender Form: Eine Verbindungsfeder verbindet entweder 1 mit 2 oder 3 mit 4:



Je zwei dieser Elemente sind zu einem Doppelschalter verbunden.
(Anregung durch den -alten- kosmos Spielcomputer Logikus)

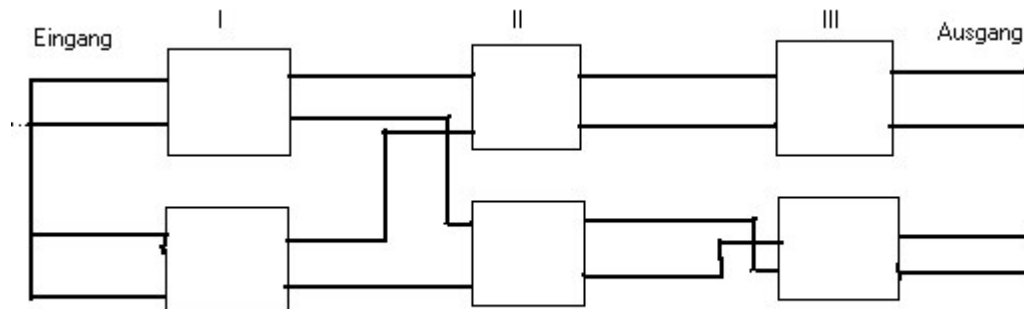
Der Schaltplan lässt sich mit einem Trick erstellen. Dabei gilt die Lampe als eingeschaltet, wenn entweder genau ein Doppelschalter oder aber alle drei auf A stehen.

Wird nur ein einziger der drei Doppelschalter verschoben, so ändert sich die Parität und die Lampe wird umgeschaltet.

Bei vier Schaltstellen gilt: Lampe an bei 1 oder 3 A-Stellungen, bei fünf Stellen, wenn 1, 3 oder 5 Schalter auf A stehen usw.

Der Aufwand an Verbindungsdraht steigt aber enorm.

Und hier der Schaltplan für drei Schaltstellen:



Diophantische Gleichungen:

Hier geht es darum, ein Potenzpolynom zu finden, das ganzzahlige Lösungen ergibt. Der einfachste Fall ist $a^2 + b^2 = c^2$.

ES gibt unendlich viele Lösungen (ganzzahlige Pythagoreische Dreiecke).

Es ist mir durch allerlei Kniffe gelungen, eine Formel zu entwickeln, die durch Einsetzen von Zahlen sämtliche ganzzahlige Lösungen liefert. Die Formel lautet $(s_1, s_2, s_3) = (a^2 + b^2, a^2 - b^2, 2ab)$.

Dabei sind s_1, s_2 und s_3 die Seitenlängen des Dreiecks, a, b sind positive ganze Zahlen.

Für $a^3 + b^3 = c^3$ sieht die Sache nicht so gut aus. Genauer gesagt, gibt es für die Gleichung keine einzige Lösung, was sich beweisen lässt. (relativ jung).

Setzt man aber $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$, so gibt es wieder Lösungen, was

intuitiv einleuchtet.

Das einfachste Quadrupel ist (3,4,5,6).

(Lösung mit Hilfe des Computers.)

Konstruktion der Zahl PI:

Allgemein gilt: Durch eine endliche Folge geometrischer Konstruktionen lässt sich die transzendente Kreiszahl PI nicht

darstellen. Was ist aber, wenn man die Unendlichkeit in Form des Fernpunktes ins Spiel bringt? Auf [author.pdf](#) habe ich einen entsprechenden Versuch veröffentlicht.

Die Konstruktion lässt sich nicht beweisen, wäre aber in jedem Fall zumindest eine gute Näherung.

Primzahlenformel:

Gleich vorweg: Eine Formel, die beim Einsetzen unendlich vieler Zahlen unendlich viele, und zwar nur Primzahlen liefert, gibt es nicht. Meiner Ansicht ist das das einzige, was es in der Mathematik nicht gibt. Auch ich bastelte in jungen Jahren viel an Primzahlenformeln herum, bis mir die Erkenntnis kam, dass es diese nicht gibt.

Trotzdem möchte ich hier eine Formel angeben, die in der grossen Mehrzahl Primzahlen liefert. Sie lautet:

$p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_3 = p$, alle p Primzahlen.

Es handelt sich meiner Ansicht um die beste Formel dieser Art, wobei 1 als Primzahl gilt und beliebig viele Zahlen auch negativ gesetzt werden können.

Logarithmus:

Es ist mir gelungen, eine Reihenentwicklung als logarithmisch zu überführen. Sie lautet:

Summe $(1/n [1 \text{ bis } n]) \cdot \text{rd. } \log(n)$, wobei sich der Logarithmus bei grossem n dem natürlichen Logarithmus annähert.

es handelt sich sozusagen um einen zweifachen Grenzwert.

Netz der Kugel:

Lässt sich eine Kugeloberfläche in der Ebene ausbreiten?

Bei Zylinder und Kegel geht dies, das weiss jedes Kind.

Auch das Hyperboloid lässt sich planifizieren, weil es durch (exzentrische) Rotation einer Geraden entsteht.

Neueste mathematische Forschungen bestätigen das Netz des Torus. Von hier aus führt die Schlussfolgerung zur Kugel, denn beide Körper lassen sich in acht gleiche Schalenteile zerlegen. (Beim Torus ergeben sich gekrümmte Halbrohre, bei der Kugel gekrümmte Dreiecke.)

So wird zwar bestätigt, dass es kein zusammenhängendes Netz gibt, aber prinzipiell doch die Möglichkeit einer geteilten

Lösung.Für eine solche wäre ich als Zuschrift sehr dankbar.